1 Zahlmengen

In diesem Kapitel wollen wir ein wichtiges Hilfsmittel der Mathematik, nämlich die Zahlmengen bereitstellen. Wir beginnen dabei mit den natürlichen Zahlen und werden anschließend die weiteren benötigten Zahlmengen konstruktiv definieren.

1.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$

Definition 1.1. (i) Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen (ohne Null). [1]

(ii) Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen mit Null. [2]

1.2 Rechenregeln für $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$

Satz 1.2. *Für je drei natürliche Zahlen $l, m, n \in \mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) gilt:*

(i) $m + n \in \mathbb{N}$ *(bzw. $\mathbb{N}_0$)* *(Abgeschlossenheit der Addition)*

(ii) $(l + m) + n = l + (m + n)$ *(Assoziativität der Addition)*

(iii) $m + n = n + m$ *(Kommutativität der Addition)*

(iv) $m \cdot n \in \mathbb{N}$ *(bzw. $\mathbb{N}_0$)* *(Abgeschlossenheit der Multiplikation)*

(v) $(l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n)$ *(Assoziativität der Multiplikation)*

(vi) $m \cdot n = n \cdot m$ *(Kommutativität der Multiplikation)*

(vii) $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$ *(Distributivität)*

---

[1] Für die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null führte Richard DEDEKIND (1831 - 1916) im Jahre 1888 das Symbol N ein. Heute schreibt man stilisiert $\mathbb{N}$.

[2] Ab 1894 gebrauchte Giuseppe PEANO (1858 - 1932) für die natürlichen Zahlen mit Null das Symbol N_0, das heute ebenfalls stilisiert und nach PEANO durch $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert wird.

1.2.1 Erlaubte Rechenoperationen für $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$

	$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$				
Addition	ja				
Subtraktion	nein				
Multiplikation	ja				
Division (ausser durch 0)	nein				
Wurzelziehen	nein				

Tabelle 1: Rechenoperationen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$

.

1.3 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Definition 1.3. Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der ganzen Zahlen. [3]

1.4 Rechenregeln für $\mathbb{Z}$

Satz 1.4. *Für je drei ganze Zahlen $l, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

(i) *Es gelten die Rechenregeln 1.2 und zusätzlich:*

(ii) $m + 0 = m$ *(0 ist neutrales Element der Addition)*

(iii) $m + (-m) = 0$ *($-m$ ist inverses Element der Addition zu m)*

(iv) $m \cdot 0 = 0$

---

[3] Schon FIBONACCI (um 1170 - nach 1240) verwendet den Begriff *numerus sanus*, den man mit „gesunde Zahl" übersetzen kann. In den folgenden Jahrhunderten wurde neben „sano" der Begriff „integer" (d. h. „ganz") synonym verwendet.

1.4.1 Erlaubte Rechenoperationen für $\mathbb{Z}$

	$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$			
Addition	ja	ja			
Subtraktion	nein	ja			
Multiplikation	ja	ja			
Division (ausser durch 0)	nein	nein			
Wurzelziehen	nein	nein			

Tabelle 2: Rechenoperationen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$

.

1.5 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Definition 1.5. Eine rationale Zahl ist eine Zahl, die als Verhältnis (lateinisch *ratio*) zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann.

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

die Menge der rationalen Zahlen. [4]

[4]Die Begriffe *rational* und *irrational* gehen auf auf die griechische Mathematik des 4. Jahrhundert vor Christus zurück. Schon EUKLID (3. Jh. v. Chr.) verwendetet sie (in ihrer griechischen Fassung *rhetos* bzw. *arrhetos* im heutigen Sinne.

1.6 Rechenregeln für $\mathbb{Q}$

Satz 1.6. *Für je drei rationale Zahlen $l, m, n \in \mathbb{Q}$ gilt*

(i) *Es gelten die Rechenregeln 1.4 und zusätzlich:*

(ii) $1 \cdot m = m$ *(1 ist das neutrale Element der Multiplikation)*

(iii) *Zu jedem $m \neq 0$ existiert $\frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$, so dass $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ ($\frac{1}{m}$ ist das inverse Element der Multiplikation zu m)*

1.6.1 Erlaubte Rechenoperationen für $\mathbb{Q}$

	$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$		
Addition	ja	ja	ja		
Subtraktion	nein	ja	ja		
Multiplikation	ja	ja	ja		
Division (ausser durch 0)	nein	nein	ja		
Wurzelziehen	nein	nein	nein		

Tabelle 3: Rechenoperationen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

.

1.6.2 Eigenschaften einiger Brüche

$\frac{1}{1} = 1.000$	$\frac{1}{3} = 0.333333... = 0.\overline{3}$	
$\frac{1}{2} = 0.500$	$\frac{1}{6} = 0.166666... = 0.1\overline{6}$	$\sqrt{2} = 1.414213...$
$\frac{1}{4} = 0.250$	$\frac{1}{7} = 0.142857... = 0.\overline{142857}$	
$\frac{1}{5} = 0.200$	$\frac{1}{9} = 0.111111... = 0.\overline{1}$	$\pi = 3.141592...$
$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{1}{11} = 0.090909... = 0.\overline{09}$	
$\underbrace{\frac{1}{10} = 0.100}_{\text{endliche Zahlen}}$	$\underbrace{\frac{1}{12} = 0.0833333... = 0.08\overline{3}}_{\text{unendlich-periodische Zahlen}}$	$\underbrace{e = 2.718281...}_{\text{irrationale Zahlen}}$

Tabelle 4: Eigenschaften einiger Brüche

.

1.7 Eigenschaften der Brüche

Satz 1.7. *Alle rationalen Zahlen lassen sich als Quotient zweier ganzer Zahlen oder als Dezimalzahlen darstellen.*

Die Dezimalzahlen können endlich sein oder sie sind unendlich - periodisch.

Unendlich-periodische Dezimalzahlen haben eine, sich unendlich oft wiederholende Ziffernfolge.

1.8 Existenz nicht-rationaler Zahlen

Satz 1.8. *Es gibt Zahlen, die sich nicht als Quotient ganzer Zahlen darstellen lassen, beispielsweise*

(i) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(ii) $\pi \notin \mathbb{Q}$

(iii) $e \notin \mathbb{Q}$

Das $\sqrt{2}$ *irrational ist, zeigt man mit einem Widerspruchsbeweis in der Schulmathematik.*

Die Irrationalität von π *wurde 1761 von Johann Heinrich LAMBERT (1728 - 1777) bewiesen, diejenige der Zahl* e *wurde 1737 von Leonhard EULER (1707 - 1783) gezeigt.*

1.9 Die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$

Definition 1.9. Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{I} = \text{Menge aller unendlichen nicht-periodischen Dezimalzahlen}$$

die Menge der irrationalen Zahlen.

1.10 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definition 1.10. Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

die Menge der reellen Zahlen. [5]

[5] Der Begriff der *reellen Zahl* geht zurück auf René DESCARTES (1596-1650), der ihn 1637 erstmalig verwendete. Die erste exakte Konstruktion der *reellen Zahlen* geht wohl auf Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897) zurück.

1.11 Rechenregeln für Ungleichungen

Satz 1.11. *Seien* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) *Dann gilt genau eine der drei folgenden Aussagen*

(1) $a < b$

(2) $a = b$

(3) $a > b$

(ii) *Bemerkung: Je zwei der obigen Bedingungen ergeben die Aussagen:*
$a \leq b$: *a ist kleiner oder gleich b*
$a \geq b$: *a ist größer oder gleich b*
$a \neq b$: *a ist ungleich b*

(iii) $(a < b \text{ und } b < c) \Rightarrow a < c$

(iv) $(a < b \text{ und } c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

(v) $(a < b \text{ und } c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ *!*

1.12 Absolutbetrag

Definition 1.12. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn a} \geq 0 \\ -a, & \text{wenn a} < 0 \end{cases}$$

der (absolute) Betrag von a. [6]

Geometrisch betrachtet ist der absolute Betrag der Abstand eines Punktes auf der Zahlengeraden vom Ursprung.

[6] Der *absolute Betrag* geht zurück auf Oskar SCHLÖMILCH (1823-1901) zurück, der ihn 1851 erstmalig verwendet hat.

1.13 Rechenregeln für den absoluten Betrag

Satz 1.13. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$ Dann gilt:*

(i) $|a| \geq 0$ *und* $(|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0)$

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(iv) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

Beispiel zu (iv)

Beispiel: $|a| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$

1.14 Unlösbarkeit einer Gleichung

Satz 1.14. *(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $a^2 \geq 0$.*

(ii) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in reellen Zahlen nicht lösbar.

1.14.1 Erlaubte Rechenoperationen für $\mathbb{R}$

	$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
Addition	ja	ja	ja	ja	
Subtraktion	nein	ja	ja	ja	
Multiplikation	ja	ja	ja	ja	
Division (ausser durch 0)	nein	nein	ja	ja	
Wurzelziehen	nein	nein	nein	≥ 0 : ja < 0 : nein	

Tabelle 5: Rechenoperationen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

.

1.15 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 1.15. Man definiert eine zusätzliche Größe i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Damit bildet man die sogenannten *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$, in denen auch das Wurzelziehen uneingeschränkt möglich ist. [7]

Die Notation i für die *„imaginäre Einheit"* geht zurück auf

Wissenschaftler 1:
Leonhard EULER, schweizer Mathematiker
(15.04.1707 Basel - 18.09.1783 St. Petersburg)

1.15.1 Erlaubte Rechenoperationen für $\mathbb{C}$

	$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
Addition	ja	ja	ja	ja	ja
Subtraktion	nein	ja	ja	ja	ja
Multiplikation	ja	ja	ja	ja	ja
Division (ausser durch 0)	nein	nein	ja	ja	ja
Wurzelziehen	nein	nein	nein	≥ 0 : ja < 0 : nein	ja

Tabelle 6: Rechenoperationen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

.

[7] Der Begriff „*komplexe Zahlen*" wurde von Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855) (*Theoria residuorum biquadraticorum*, 1831) eingeführt, der Ursprung der Theorie der komplexen Zahlen geht auf die italienischen Mathematiker Gerolamo CARDANO (1501 - 1576) (*Ars magna*, Nürnberg 1545) und Rafael BOMBELLI (1526 - 1572) (*L'Algebra*, Bologna 1572; wahrscheinlich zwischen 1557 und 1560 geschrieben) zurück.

Dass es quadratischen Gleichungen gibt, die in den reellen Zahlen nicht lösbar sind, wurde schon sehr früh bemerkt, beispielsweise schon in der um 820 n. Chr. verfassten Algebra des Muhammed ibn Mûsâ ALCHWÂRIZMÎ (um 780 - etwa 850). Aber bei dem nächstliegenden und unanfechtbaren Schluss, dass diese Art von Gleichung nicht lösbar sei, blieb die mathematische Forschung nicht stehen.